COORDENADORIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

GABARITO DA PROVA DE SELEÇÃO DE TUTORES-15-08-2014

Questão 1) Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando $300kg$. Até agora ele gastou R$380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R$2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de $1,5kg$ por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R$18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

Solução:

Sejam t o tempo em dias, $C(t)$ a função custo para se manter os bois, V o preço de venda e L a função lucro.

Temos que $C(t) = 380.000 + 2 \cdot 200t = 380.000 + 400t$, pois o fazendeiro já gastou R$380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R$2,00 por dia para manter cada boi.

Cada boi pesa, em t dias, $(300 + 1,5t)kg$. Como há 200 bois, então o peso total dos bois é $200(300 + 1,5t)kg$. Como o preço de venda é R$18,00 o kilo hoje e, a cada dia, cai 0,05 centavos, temos que

$$\begin{aligned} V &= 200(300 + 1,5t)(18 - 0,05t) \\ &= (60.000 + 300t)(18 - 0,05t) \end{aligned}$$

A função lucro é dada por $L = V - C$. Logo, temos:

$$L(t) = (60.000 + 300t)(18 - 0,05t) - 380.000 - 400t$$

Devemos determinar um ponto de máximo para a função lucro. Temos que

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &= 300(18 - 0,05t) + (60.000 + 300t)(-0,005) - 400 \\ &= 5400 - 15t - 3000 - 15t - 400 \\ &= -30t + 2000 \end{aligned}$$

Dessa forma, o ponto crítico de $L(t)$ é dado por $L^{'}(t) = 0$, isto é

$$-30t + 2000 = 0$$

o que implica que $t = \dfrac{200}{3}$, isto é, $t = 67$ dias.

Precisamos verificar se este ponto crítico é ponto de máximo de L. Para isso, vamos utilizar o teste da derivada segunda. Temos que $L^{''}(t) = -30$, o que implica que a derivada segunda é negativa para qualquer t. Logo, $L^{''}(67) < 0$, o que implica que $t = 67$ é um ponto de máximo de L.

Dessa forma, para obter o lucro máximo, o fazendeiro deverá esperar 67 dias para vender os bois.

Questão 2) Sejam AB e CD cordas de um mesmo círculo, que se interceptam em um ponto P, que se encontra dentro do círculo. Prove que $\overline{AP}\ \overline{PB} = \overline{CP}\ \overline{PD}$.

Solução:

Sejam AB e CD cordas de um mesmo círculo, que se interceptam em um ponto P, conforme mostra a Figura 1, a seguir:

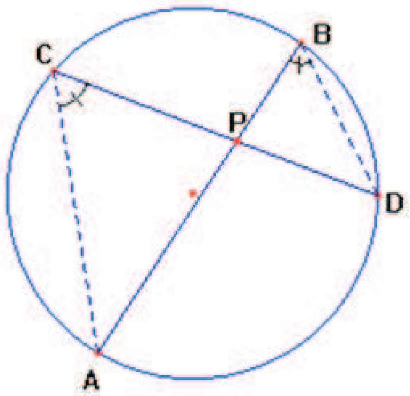

Figura 1

Os ângulos $A\hat{B}D = A\hat{C}D$ pois subentendem o mesmo arco AD (veja Figura 1). Da mesma forma, temos que os ângulos $C\hat{A}B = C\hat{D}B$ pois subentendem o mesmo arco CB. Temos também que $C\hat{P}A = B\hat{P}D$, pois são opostos pelo vértice. Então, pelo caso AAA, concluímos que os triângulos APC e DPB são semelhantes. Portanto, temos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}},$$

o que implica que $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

Questão 3) Considere a cônica C de equação

$$C : \left(\frac{3x}{5}\right)^2 + y^2 = 9.$$

Determine os focos, os vértices, a excentricidade e faça um esboço da cônica C.

Solução: Elevando o que está entre parênteses ao quadrado, vamos obter:

$$\frac{9x^2}{25} + y^2 = 9.$$

Dividindo todos os membros desta equação por 9, vamos obter:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

que é a equação reduzida de uma elipse, com focos sobre o eixo Ox. Sabemos que a equação reduzida de uma elipse com focos sobre o eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a^2 = b^2 + c^2$ e a, b, c positivos.
Dessa forma, temos que $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$ e, consequentemente, temos:
Focos: $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$.
Vértices: $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, -3)$, $B_2 = (0, 3)$.
Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.
Esboço da elipse (ver Figura 2):

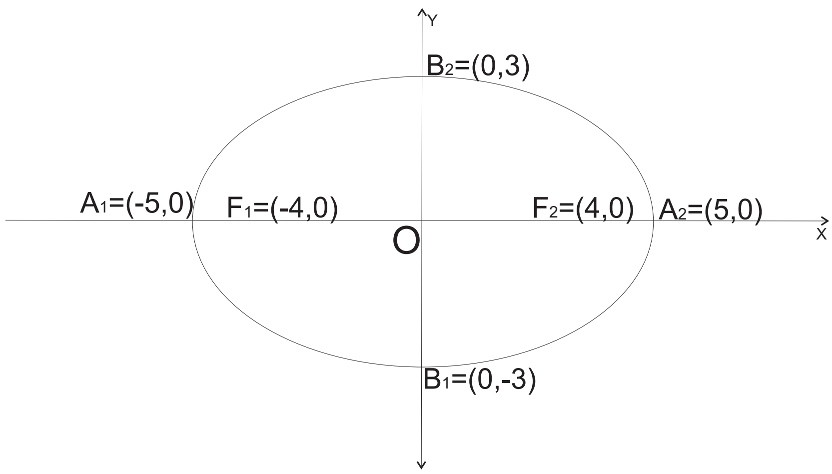

Figura 2

Questão 4) A urna **A** contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna **B** contém 2 vermelhas e 8 azuis. Joga-se uma moeda "honesta". Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna **A**; se der coroa, extrai-se uma ficha da urna **B**. Sabendo-se que uma ficha vermelha foi selecionada, qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

Solução: Sejam c cara, k coroa e v vermelha. Temos que

$$P(c) = \frac{1}{2},\ P(v|c) = \frac{3}{5},\ P(k) = \frac{1}{2},\ P(v|k) = \frac{2}{10},$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
P(v) &= P(c)P(v|c) + P(k)P(v|k) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{4}{10} \\
&= 0,4
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
P(c|v) &= \frac{P(c \cap v)}{P(v)} \\
&= \frac{P(c)P(v|c)}{P(v)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{10}} \\
&= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0,75
\end{aligned}$$

Questão 5) A resolução de problemas como um objetivo é quase tão antiga quanto a própria Matemática. Já a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino, essa tem sua origem, conforme a literatura, em meados da década de 1940. Contudo, foi somente a partir da década de 1980 que essa metodologia foi incorporada em documentos oficiais em países como os Estados Unidos da América, o Japão, a Inglaterra e, mais tarde, currículos de muitos países do mundo. O Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos foi o órgão oficial responsável por indicar que o currículo de Matemática daquele país fosse orientado pela Resolução de Problemas.

Com base nessas informações, disserte sobre a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino considerando seu(s) principal(is) representante(s), os objetivos para o ensino de Matemática com base nessa Metodologia, o papel dos problemas matemáticos, do professor e do aluno nessa Metodologia. Procure não utilizar mais que 15 linhas.

Solução: É esperado que o candidato cite (1) George Polya como o principal responsável pela Metodologia de Ensino Resolução de Problemas. A obra considerada precursora, que institui uma preocupação metodológica sobre o papel do problema matemático no ensino de Matemática, é o livro "A arte de resolver problemas" (POLYA, 1945). (2) Após o lançamento desse livro, uma massa crítica de educadores em Resolução de Problemas (RP) começou a se formar, mas foi somente na década de 1970 que esse grupo ganhou espaço em congressos na área vindo, mais tarde, contribuir para a que RP fosse incorporada no currículo dos Estados Unidos. No Brasil, a RP passou a ser ouvida, ao menos em termos de documentos oficiais, somente em meados da década de 1990 mas, só agora que se pode ler nas Orientações Curriculares (PCNs) indicações de que as aulas de Matemática devem se desenvolver sob essa abordagem. (3) Durante os anos de (1945-2010), a RP passou por diferentes fases que compreenderam, o ensino "sobre" RP, que consiste de ensinar Matemática com alguma variação do trabalho de Polya; o ensino "para" resolver problemas, ensina-se Matemática para, então, resolver problemas com o conhecimento aprendido; ou ensinar Matemática "através" da RP (ou via), que indica que, enquanto se resolve problemas, se aprende Matemática. (4) Os problemas são o carro chefe dessa Metodologia. Um conceito matemático novo é sempre ensinado a partir de um problema, ou seja, o problema é o disparador de uma nova aprendizagem. Ao professor compete o trabalho de pesquisar por bons problemas, aqueles capazes de gerar novos conceitos e novos conteúdos. Dos alunos espera-se que eles se coloquem na condição de responsáveis por produzirem seu próprio conhecimento e que passem a ver seu professor como um guia, como um mediador, e não como um detentor único de conhecimento. Pode-se fazer, ainda, referência às quatro fases para a resolução de problemas que foi proposta por Polya: 1. Ler o problema, 2. Estabelecer um plano, 3. Executar o plano, 4. Encontrar uma resposta.